

# EVALUACIÓN APROXIMADA DE LA ACELERACIÓN ABSOLUTA EN SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD CONSIDERANDO LA PARTICIPACIÓN DE $n$ FORMAS MODALES

Juan Diego Jaramillo <sup>1</sup>

**Resumen:** Se presenta una propuesta para la estimación de la aceleración absoluta máxima en los diferentes niveles de un sistema de múltiples grados de libertad en función de  $n$  de sus formas modales y del espectro de respuesta de aceleraciones, que tradicionalmente se propone en los reglamentos. La propuesta está basada en la combinación cuadrática completa, CQC, de las respuestas modales y la señal de excitación. El error promedio de la propuesta presentada cuando se compara con la solución exacta calculada usando series de tiempo es de aproximadamente 10% que contrasta con errores promedio del orden de 30% y mayores en otras tres propuestas presentadas en códigos de diseño sísmico actualmente vigentes.

**Palabras Claves:** Aceleración absoluta, combinación modal, desplazamiento modal, elementos no estructurales.

## APPROXIMATE EVALUATION OF THE ABSOLUTE ACCELERATION IN MULTI DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS CONSIDERING THE CONTRIBUTION OF $n$ MODES SHAPES

**Abstract:** A proposal is presented for estimating the maximum absolute acceleration at different levels in multi-degree of freedom systems. This is done in terms of  $n$  of the modal shapes and the acceleration response spectrum, which traditionally is part of seismic regulations. The proposal is based on the Complete Quadratic Combination (CQC) between modal responses and the ground-motion signal. The present proposal has an ~10% average error when it is compared with exact solutions calculated using time series. This error contrasts with 30% and greater average errors found in other three analyzed proposals presented in three seismic codes.

**Keywords:** Absolute acceleration, nonstructural elements, modal combination, modal displacements.

### INTRODUCCIÓN

En el diseño de los elementos estructurales de un sistema sometido a aceleraciones en la base se parte de la historia de los desplazamientos relativos respecto a la base, que son justamente la solución de la ecuación dinámica (1). En algunos casos, esta solución se presenta en la forma de fuerzas estáticas equivalentes que reproducen los desplazamientos en un instante determinado o en el instante del desplazamiento máximo, cuando el sistema se idealiza como de un grado de libertad con una forma modal definida. Es claro, entonces, que los esfuerzos internos, de quienes depende directamente el diseño adoptado, están en función de los desplazamientos relativos de la estructura respecto a la base, lo que justifica plenamente la manera como se describe la acción sísmica en la mayoría de los códigos sismo-resistentes alrededor del mundo, a través de un espectro de respuesta.

En la mayoría de estos códigos sismo resistentes el espectro de respuesta propuesto corresponde al espectro de pseudoaceleraciones, que está relacionado directamente con las fuerzas estáticas que reproducen el desplazamiento máximo relativo de un sistema de un grado de libertad. Esta representación de la acción sísmica tiene que ver más con un esquema de pensamiento en el que las solicitaciones estructurales se presentan como fuerzas y no como

---

<sup>1</sup>Profesor, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad EAFIT, A.A. 3300, Medellín, Colombia. E-mail: [jjarami@eafit.edu.co](mailto:jjarami@eafit.edu.co)

desplazamientos, que con un beneficio claro en los procedimientos y resultados de diseño. En algunos reglamentos más modernos se especifica directamente el espectro de respuesta de desplazamientos, esta vez junto con un procedimiento de diseño basado en los desplazamientos relativos de la estructura respecto a la base.

Se quiere llamar la atención en este artículo, no al procedimiento de diseño de los elementos estructurales sino al de los elementos no estructurales, particularmente aquellos adheridos a la estructura en un solo punto y de alta rigidez, que interactúan en bajo grado con la estructura, y que justamente por razón de no aportar ni a la resistencia ni a la rigidez del sistema, es práctica común involucrar en el modelo sólo su aporte en la masa. Ahora, el hecho de que no aporten ni a la resistencia ni a la rigidez del sistema no significa que no estén sometidos a solicitaciones que necesariamente hay que estimar para evaluar la propia integridad de estos elementos y la de los sistemas que los sujetan a la estructura.

Las preguntas a responder son: ¿A qué historia de aceleraciones absolutas está sujeto un elemento no estructural anclado en alguna parte de la estructura? A esta pregunta se responde fácilmente puesto que se supone que la acción sísmica está definida por un acelerograma y la aceleración absoluta que se está buscando se calcula como la suma de la historia de las aceleraciones relativas al suelo (obtenidas de la solución de la ecuación dinámica del sistema) y la historia de la aceleración del sismo en la base de la estructura. La segunda pregunta que se haría y que es la más común es: ¿A qué aceleración absoluta máxima está sujeta un elemento no estructural anclado en alguna parte de la estructura? A esta pregunta no se responde tan fácilmente puesto que en este caso se supone que la acción sísmica está representada por un espectro de respuesta, que representa justamente la respuesta de la estructura en términos de desplazamientos relativos o de pseudoaceleraciones, y sólo se tiene información parcial de la historia de las aceleraciones en la base de la estructura y de la historia de las aceleraciones absolutas en un sitio particular de la estructura.

A continuación se explora el tema con detalle y se propone un procedimiento aproximado para responder a la segunda pregunta planteada con un error aceptable para la mayoría de las aplicaciones.

Especialmente para el diseño de elementos secundarios en plantas nucleares se han desarrollado procedimientos para estimar el llamado *espectro de respuesta de piso*, que de la misma manera que el espectro de respuesta para una estructura, define las características de la respuesta de osciladores de diferentes frecuencias y amortiguamientos, adosados a los diferentes niveles de la estructura principal cuando ésta es sometida a un movimiento en la base caracterizado por un espectro de respuesta. Ejemplos de estos procedimientos son los que presentan Singh (1980), Singh y Sharma (1985), Igusa y Der Kiureghian (1985) y Villaverde (1991), entre otros.

Es claro que una respuesta a la pregunta planteada en un párrafo anterior está dada como la ordenada del espectro de respuesta de piso correspondiente a un nivel de piso. La pregunta que aún se plantea está planteada y presenta un planteamiento simple basado en el espectro de respuesta de pseudoaceleraciones, que son los que ordinariamente se presentan en los reglamentos de diseño sísmico alrededor del mundo, sin tener que hacer uso de procedimientos más elaborados, que en algunos de los casos reportados están basados en espectros de velocidades o aceleraciones relativas como en el caso de algunas de las referencias citadas.

De particular interés es la estimación de la aceleración absoluta máxima pues como ya se mencionó, el llamado espectro de piso parte de esta aceleración, que por medio de un análisis convencional sólo puede hallarse asignando rigideces muy grandes a los elementos de soporte de las masas no estructurales, procedimiento que en algunos casos genera inestabilidad numérica de los algoritmos que usualmente se utilizan para estimar la respuesta dinámica de sistemas estructurales.

De otro lado, para estimar la respuesta máxima de sistemas no estructurales que interactúan con la estructura por razón de su rigidez mensurable y en algunas ocasiones periodos de vibración cercanos a los de la estructura que generan cierto grado de resonancia, sí pueden usarse sin ningún problema (salvo el incremento en los grados de libertad) los procedimientos convencionales de la dinámica estructural. Para esto se modelan como parte del sistema estructural y con su rigidez y masa, estos elementos no estructurales “flexibles”.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se plantea a continuación el problema suponiendo que se conoce la historia de aceleraciones en la base de la estructura.

La ecuación dinámica de un sistema de múltiples grados de libertad se escribe:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = -[\mathbf{M}]\{\mathbf{1}\} a_g(t) \quad (1)$$

donde,  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  y  $[\mathbf{K}]$  representan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente,  $\{\ddot{\mathbf{x}}\}$ ,  $\{\dot{\mathbf{x}}\}$  y  $\{\mathbf{x}\}$  representan los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento relativos, respectivamente,  $\{\mathbf{1}\}$  representa el vector geométrico para asignación de masas y  $a_g(t)$  representa la historia de aceleraciones en la base de la estructura.

Si  $[\Phi]$  representa la matriz de formas modales,  $\{\phi^j\}$  y  $\{z\}$  el vector de desplazamientos modales que contiene  $z^j$ , que son las soluciones de las ecuaciones dinámicas desacopladas,

$$\ddot{z}^j + 2\xi^j \omega^j \dot{z}^j + \omega^{j^2} z^j = -a_g(t) \quad (2)$$

donde  $\xi^j$  y  $\omega^j$  representan la relación de amortiguamiento y frecuencia circular propios del modo  $j$ , respectivamente, la historia de aceleraciones absolutas del grado de libertad  $i$  debido al modo  $j$ ,  $a_i^j(t)$ , se escribe como:

$$a_i^j(t) = FP^j \phi_i^j \ddot{z}^j(t) + a_g(t) \quad (3)$$

donde  $FP^j$  es el factor de participación del modo  $j$ , que se escribe como:

$$FP^j = \frac{\{\phi^j\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{1}\}}{\{\phi^j\}^T [\mathbf{M}] \{\phi^j\}} \quad (4)$$

De manera sintética, la aceleración absoluta de algún grado de libertad  $i$  debida a alguna forma modal  $j$  se puede escribir como:

$$a_i^j(t) = \phi_i^j \ddot{z}^j(t) + a_g(t) \quad (5)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

donde

$$\phi_i^j = FP^j \phi_i^j, \quad (6)$$

es un factor que depende de las formas modales y la matriz de masas.

La aceleración absoluta del grado de libertad  $i$  y debida a la combinación de  $n$  modos se escribe como:

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{j=n} [\phi_i^j \ddot{z}^j(t)] + a_g(t) \quad (7)$$

En Jaramillo (2003) se exploró una propuesta aproximada para evaluar la aceleración absoluta de algún grado de libertad debida a un solo modo a partir de la ecuación (5). Basados en esa propuesta se explora ahora una propuesta aproximada para evaluar la aceleración absoluta de algún grado de libertad debida a la combinación de  $n$  modos según la ecuación (7).

La ecuación (7) indica que la aceleración absoluta de algún grado de libertad y debida a  $n$  modos de vibración se expresa como la combinación lineal de  $n+1$  series de tiempo:  $\sum_{j=1}^{j=n} \phi_i^j \ddot{z}^j(t)$  y  $a_g(t)$ .

Si la acción sísmica se especifica por medio de la aceleración en la base de la estructura,  $a_g(t)$ , entonces,  $\ddot{z}^j(t)$  es fácilmente calculable resolviendo la ecuación (2) por cualquiera de los métodos tradicionales, y la aceleración absoluta  $a_i(t)$  es simplemente la combinación lineal de  $n+1$  series de tiempo conocidas, según la ecuación (7).

El problema se presenta cuando, como es usual en la mayoría de los códigos sismo resistentes alrededor del mundo, la acción sísmica se especifica a través de un espectro de diseño, que dependiendo de qué tan juiciosamente haya sido especificado, se puede asimilar a una especie de envolvente de los espectros de respuesta de posibles sismos de diseño en el sitio. Esta descripción de espectro de diseño debe considerarse únicamente como ilustrativa porque ni es claro el procedimiento descrito para calcularlo, ni la definición de sismo de diseño. En lo que sigue se considerará, entonces, el espectro de diseño como el espectro de respuesta del “sismo de diseño”  $a_g(t)$  para una determinada relación de amortiguamiento  $\xi$ .

En el caso anterior sólo se conoce el valor máximo de la aceleración en la base,  $a_{max}$ , definida como el corte del espectro de pseudoaceleraciones con el eje de las ordenadas cuando en el eje de las abscisas se definen, como es usual, los periodos estructurales, y la pseudoaceleración asociada a la frecuencia circular de vibración del modo  $j$ ,  $Sa(\omega^j)$ . Este último valor puede considerarse como una muy buena aproximación, con desviaciones menores al 1%, a la aceleración absoluta de un sistema de un grado de libertad de amortiguamiento  $\xi$  y frecuencia circular de vibración  $\omega^j$  sujeto a un aceleración en la base igual a  $a_g(t)$ .

En otras palabras, no están completamente definidas ni  $\ddot{z}^j(t)$  ni  $a_g(t)$  pero está definido el valor máximo de  $a_g(t)$ ,  $a_{max}$ , que es igual al valor máximo de  $a_i^j(t)$  cuando  $\phi_i^j$  es igual a 0.0 y está definido el valor máximo de  $a_i^j(t)$  cuando  $\phi_i^j$  es igual a 1.0, que es igual a  $Sa(\omega^j)$ . La pregunta en este caso sería, ¿cuál es el valor máximo de  $a_i(t)$ ,  $a_{i,max}$ , para valores de  $\phi_i^j$  diferentes de 0.0 y 1.0?

## ANTECEDENTES

En Jaramillo (2003), se revisan críticamente cuatro propuestas en uso actualmente: la de Paulay y Priestley (1992), la propuesta del título A de las Normas Colombianas para Diseño y Construcción Sismo Resistente-NSR-98 (AIS, 1999), la propuesta de la norma NEHRP (1997) y la propuesta de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo de la norma CTE (1997). Estas cuatro metodologías y sus respectivas variaciones que se han introducido en Jaramillo (2003), están basadas en el hecho de que la estructura sólo se deforma en una sola configuración, que coincide con la forma modal fundamental. No obstante, se usarán estas metodologías, además de la solución “exacta” usando series de tiempo, para comparar la solución propuesta en este trabajo, que incluye  $n$  formas modales.

## PROPUESTA

En lo que sigue se considera que la acción sísmica está definida a través del espectro de respuesta de pseudoaceleraciones, lo que significa que para un modo de vibración cualquiera, definido a través de su forma modal  $\{\phi^j\}$ , y su frecuencia circular de vibración  $\omega^j$ , se conoce la aceleración espectral  $Sa(\omega^j)$ , su factor de participación,  $FP^j$ , y el factor  $\phi_i^j$ , estas dos últimas dados por las ecuaciones (4) y (6). Como se mencionó en un párrafo anterior, en este caso se conoce  $a_{max}$ , que es igual al valor máximo de  $a_i^j(t)$  cuando  $\phi_i^j$  es igual a 0.0 y se conoce el valor máximo de  $a_i^j(t)$  cuando  $\phi_i^j$  es igual a 1.0, que es igual a  $Sa(\omega^j)$ , como puede comprobarse de la ecuación (5).

La esperanza de la aceleración absoluta máxima del grado de libertad  $i$ ,  $a_{i,max}$  en función de los valores máximos de las aceleraciones modales relativas,  $\ddot{z}_{max}^j$ , y la aceleración máxima del suelo,  $a_{max}$ , se puede calcular usando la siguiente expresión:

$$a_{i_{\max}} = \left[ \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\rho_{jk} \phi_i^j \phi_i^k \ddot{z}_{\max}^j \ddot{z}_{\max}^k) + 2 \sum_{j=1}^{j=n} (\rho_{gj} a_{\max} \phi_i^j \ddot{z}_{\max}^j) + a_{\max}^2 \right]^{1/2} \quad (8)$$

El primer término dentro del corchete del lado derecho de la ecuación (8) corresponde a la combinación cuadrática completa (CQC, por sus siglas en inglés) de las aceleraciones modales relativas máximas, y en éste,  $\rho_{jk}$  corresponde a los coeficientes de correlación entre las respuestas modales.

El segundo término dentro del corchete del lado derecho de la ecuación (8) corresponde a la combinación entre las aceleraciones modales relativas máximas y la aceleración máxima del terreno, y en éste,  $\rho_{gj}$  corresponde a los coeficientes de correlación entre las respuestas modales relativas y la excitación del terreno.

Para evaluar la ecuación 8 faltan por estimar las aceleraciones modales relativas máximas  $\ddot{z}_{\max}^j$ , los coeficientes de correlación entre las respuestas relativas y la excitación del terreno,  $\rho_{gj}$ , y los coeficientes de correlación entre las respuestas modales,  $\rho_{jk}$ . La aceleración máxima del terreno,  $a_{\max}$ , se conoce del espectro de respuesta de pseudoaceleraciones y los coeficientes  $\phi_i^j$  pueden ser evaluados de las formas modales y la matriz de masas según la ecuación (6).

Se supone que los coeficientes de correlación entre las respuestas modales  $\rho_{jk}$ , se evalúen de acuerdo con las expresiones propuestas por Hahn y Valenti (1997) para combinación de respuestas modales cuando la excitación es de banda angosta. Por claridad en la exposición, en las ecuaciones (9) a (12) se transcriben estas expresiones:

$$\rho_{jk} = \frac{\sqrt{\xi^j \xi^k \beta_{jk}} \left[ \frac{1}{2} (1 - \beta_{jk}) \ln(\varepsilon_{jk}) + (\xi^k + \xi^j \beta_{jk}) (v^j + v^k) \right]}{\left[ (1 - \beta_{jk})^2 + (\xi^k + \xi^j \beta_{jk})^2 \right] \sqrt{v^j v^k}} \quad (9)$$

donde:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{\left[ \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega^k} \right)^2 + \xi^{k2} \right] \left[ \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega^j} \right)^2 + \xi^{j2} \right]}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega^j} \right)^2 + \xi^{j2} \right] \left[ \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega^k} \right)^2 + \xi^{k2} \right]} \quad (10)$$

$$v^j = \arctan \left[ \frac{\left( \frac{\omega_2}{\omega^j} - \frac{\omega_1}{\omega^j} \right) \xi^j}{\left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega^j} \right) \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega^j} \right) + \xi^{j2}} \right] \quad (11)$$

$$\beta_{jk} = \frac{\omega^j}{\omega^k} \quad (12)$$

En las ecuaciones (10) a (12) las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) definen el ancho de banda de la señal de excitación y, además, se debe considerar que el ángulo  $v^j$  varía entre 0 y  $\pi$ .

Con relación al ancho de banda de la señal de excitación, se propone que se defina con base en el espectro de pseudovelocidades, que, para amortiguamientos bajos como los que normalmente se suponen para las edificaciones, se asemeja al espectro de amplitudes de Fourier de la señal. Además, se propone que este ancho de banda contenga las pseudovelocidades que superen el 30% de la ordenada máxima del espectro de pseudovelocidades, lo que aproximadamente equivale a un ancho de banda que supere el 10% de la ordenada máxima del espectro de potencia.

Ahora, llevando al límite la ecuación (9) cuando  $\omega^j \rightarrow \infty$  y  $\xi^j \rightarrow 0$ , se obtiene el coeficiente de correlación  $\rho_{gk}$  entre la excitación del terreno y la respuesta modal  $k$  como (Hahn y Valenti, 1997):

$$\rho_{gk} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi^k \omega^k}{\omega_2 - \omega_1}} \frac{\ln(\varepsilon_{gk})}{\sqrt{\nu_k}} \quad (13)$$

donde

$$\varepsilon_{gk} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega^k}\right)^2 + \xi^{k^2}}{\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega^k}\right)^2 + \xi^{k^2}} \quad (14)$$

y  $\nu^k$  se calcula de acuerdo con la ecuación (11).

A continuación, se propone una aproximación para las aceleraciones modales relativas máximas  $\ddot{z}_{\max}^j$ , basada en las mismas hipótesis y con la misma estrategia descrita en Jaramillo (2003).

Si la ecuación (8) se desarrolla considerando únicamente la participación del modo  $j$  se tiene:

$$a_{i\max}^j = \sqrt{(\varphi_i^j \ddot{z}_{\max}^j)^2 + 2\rho_{gi} a_{\max} (\varphi_i^j \ddot{z}_{\max}^j) + a_{\max}^2}, \quad (15)$$

y si en ésta se considera que la aceleración máxima absoluta,  $a_{i\max}^j$ , puede aproximarse a la aceleración espectral  $Sa(T^j)$  cuando  $\varphi_i^j = 1.0$ , se obtiene:

$$\ddot{z}_{\max}^j = a_{\max} \left( -\rho_{gi} + \sqrt{\left(\frac{Sa(T^j)}{a_{\max}}\right)^2 - 1 + \rho_{gi}^2} \right) \quad (16)$$

Esta expresión junto con la ecuación (8) y los coeficientes de correlación definidos por las ecuaciones (9)-(13), definen completamente el problema de calcular  $a_{i\max}$  en función de  $a_{\max}$ ,  $Sa(T^j)$  y  $\varphi_i^j$ .

Eventualmente, en la ecuación (16) pueden resultar valores imaginarios de la raíz cuadrada propuesta cuando se evalúa para periodos  $T^j$  altos en donde se presentan valores y bajos de  $Sa(T^j)$ , y en donde, además, los coeficientes de correlación  $\rho_{gi}$  calculados, aparentemente son muy bajos debido al ancho de banda del espectro de potencia muy generoso en bajas frecuencias. Para resolver este problema se sugiere incrementar la frecuencia  $\omega_1$  que define el ancho de banda de la señal de excitación hasta superar el problema.

## RESULTADOS

A continuación se comparan los resultados exactos usando para su cálculo la respuesta en el dominio del tiempo de sismos registrados, con los resultados de la propuesta presentada. Igualmente, se comparan los resultados exactos y la propuesta que se hace, con la actual propuesta de la norma NSR-98, con la propuesta de las NTC-2001, con la propuesta de la Norma NEHRP (1997), con la propuesta de Paulay y Priestley (1992) y con la propuesta de Jaramillo (2003). Estas dos últimas, aunque planteadas considerando únicamente la forma modal fundamental, dan una idea de lo acertado o no de esta hipótesis.

Para lo anterior, se seleccionaron seis acelerogramas con contenidos frecuenciales y formas espectrales muy diferentes.

**Tabla 1: Registros usados para cálculo y comparación de resultados.**

ESTACIÓN
El Centro, 1940
Tokachi-Oki, 1968
México, SCT, 1985
Chile, Viña del Mar, 1985
Loma Prieta, Corralitos, 1989
Loma Prieta, Capitol Fire Station, 1989

A continuación, se muestran los valores exactos y aproximados propuestos para la aceleración absoluta en función de la altura normalizada de la edificación,  $(y/H)$ , para formas modales del tipo:

$$\phi_{y/H}^j = \text{Sen}\left(\frac{(2j-1)\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}\right), \quad j=1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

que corresponden a las formas modales por cortante de un voladizo, y sus frecuencias circulares de vibración asociadas:

$$\omega^j = \frac{(2j-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{GA_s}{mH^2}}, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$\omega^j = (2j-1)\omega^1, \quad j=2, 3, 4, \dots \quad (19)$$

donde  $G$  representa el módulo de corte del material,  $A_s$  el área de cortante de la sección transversal y  $m$  la masa por unidad de longitud del voladizo.

Para el cálculo de la aceleración absoluta “exacta” a las diferentes alturas se utilizan 10 modos, al igual que para el caso de la propuesta que aquí se presenta. Para las otras propuestas analizadas simplemente se usan las expresiones que aparecen en la literatura, que en algunos casos dependen únicamente de la forma fundamental de vibración,  $\phi_{y/H}^1$ , y de su frecuencia circular de vibración,  $\omega^1$ .

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Las bandas de frecuencia,  $(\omega_1 - \omega_2)$  que se utilizaron en los cálculos son las que se indican en la Tabla 2.

**Tabla 2: Bandas de frecuencia usadas para el cálculo de la respuesta según la propuesta presentada.**

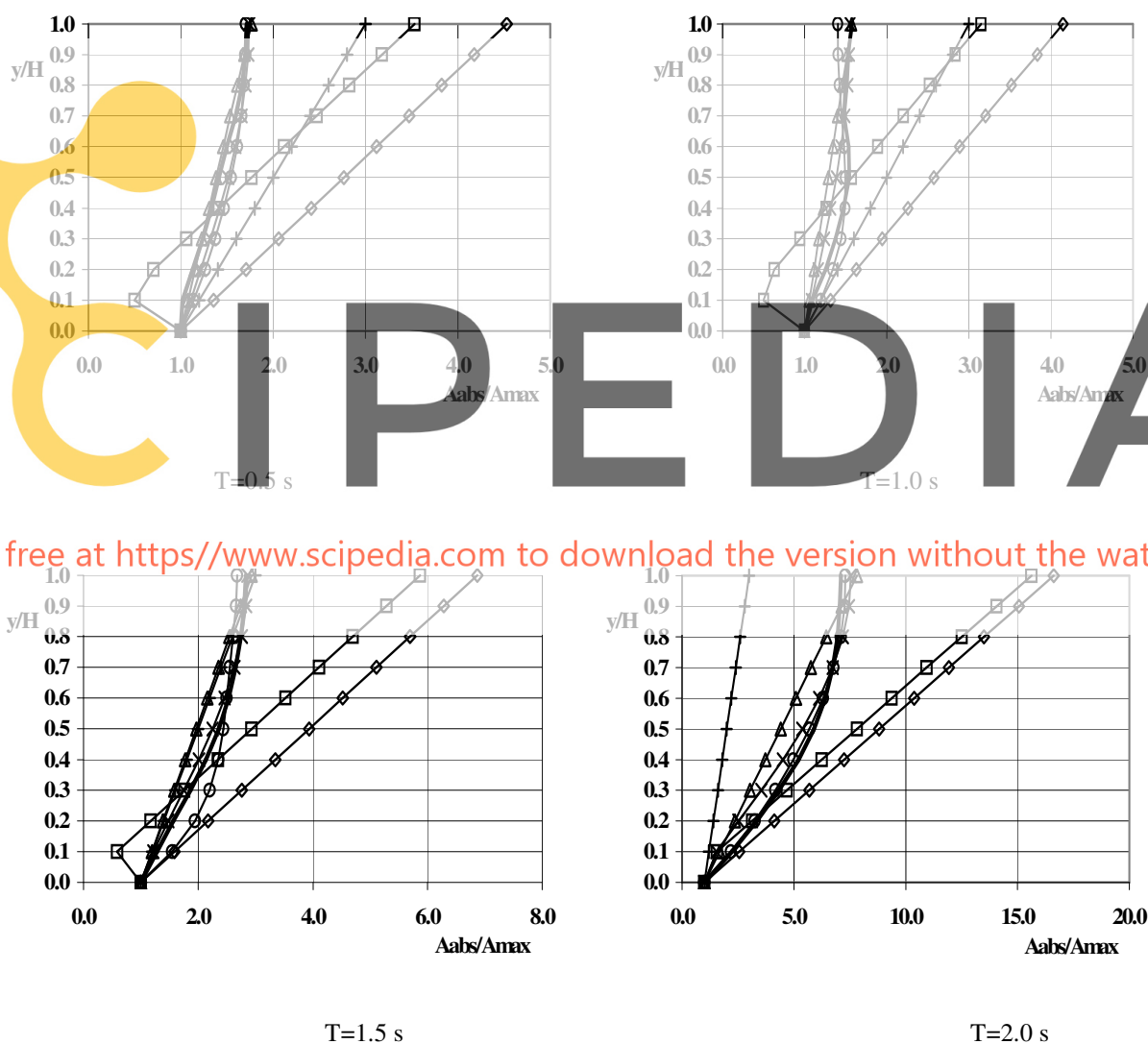
REGISTRO	Banda de frecuencia $\omega_1 - \omega_2$ (rad/s)
El Centro, 1940	2.62 – 41.89
Tokachi-Oki, 1968	5.51 – 62.83
México, SCT, 1985	2.33 – 3.14
Chile, Viña del Mar, 1985	5.71 – 62.83
Loma Prieta, Corralitos, 1989	3.14 – 41.89
Loma Prieta, Capitol Fire Station, 1989	4.49 – 62.83

De la Figura 1, que muestra la respuesta al sismo de México de 1985 (casi armónico con periodo cercano a 2.0s), es claro que la propuesta presentada, como la de Jaramillo (2003) y la de Paulay y Priestley, se ajustan bien a la respuesta calculada usando la serie de tiempo. En este caso, la respuesta estimada considerando sólo el modo fundamental de vibración (Jaramillo, 2003 y Paulay y Priestley, 1992) es adecuada. Esto se debe a que el espectro de aceleraciones de esta señal entre 0.0s y 2.0s es en general creciente, lo que hace que los modos superiores tengan una respuesta muy reducida comparada con la respuesta del modo fundamental. Las respuestas estimadas con las normas sismoresistentes NSR-98 y NTC-2001 son en general mayores que la respuesta exacta, ya que estas normas utilizan una aproximación al modo fundamental amplificado para considerar los modos superiores, y éstos, para esta señal en particular, no participan significativamente en la respuesta. La respuesta calculada con la Norma NEHRP (1997), que no depende de la aceleración espectral (constante e independiente del periodo fundamental de vibración de la estructura) sobrestima la



respuesta para periodos fundamentales de vibración de 0.5s y 1.0s, se ajusta bien para un periodo de vibración de 1.5s y subestima la respuesta para un periodo de 2.0s, coincidente con el periodo de vibración de la excitación.

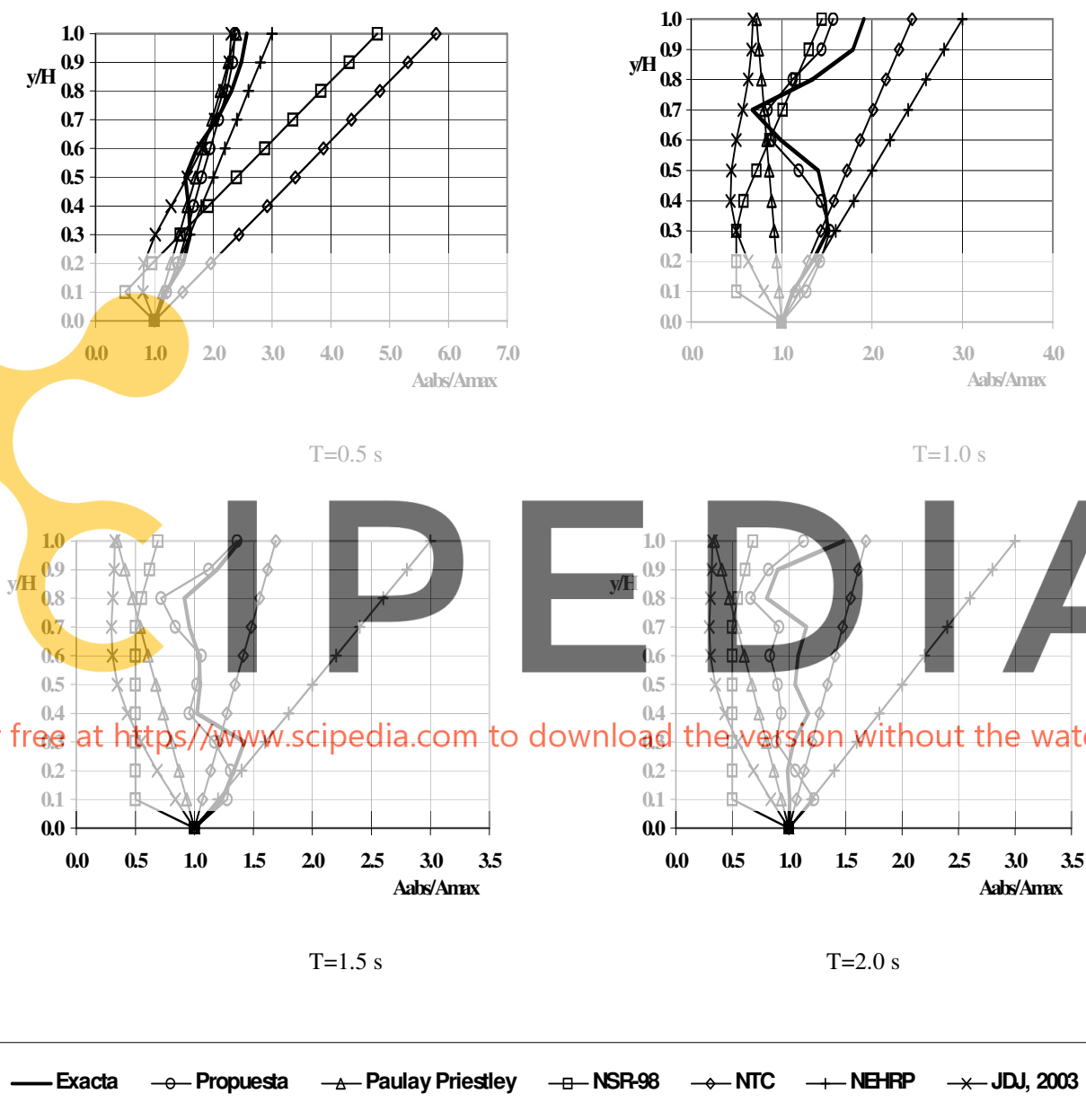
La Figura 2, que muestra la respuesta al sismo de Loma Prieta, registro de Corralitos, indica que la propuesta que aquí se presenta se ajusta en general mucho mejor que las otras propuestas a una respuesta que es muy variable en altura, indicando claramente la participación en este caso de los modos superiores en la respuesta. En general, las normas sismo resistentes estudiadas no siguen la tendencia en altura de la respuesta calculada usando la serie de tiempo, indicando que las expresiones propuestas no capturan la esencia del fenómeno en estudio. La propuesta de Jaramillo (2003) y Paulay y Priestley (1992), que consideran sólo el modo fundamental, subestiman la respuesta de estructuras con periodos fundamentales superiores o iguales a 1.0s, para los que el espectro de aceleraciones es en general decreciente, indicando nuevamente una alta participación en este caso de los modos superiores en la respuesta. La norma mexicana, NTC-2001 y la norma NEHRP (1997), sobreestiman la respuesta en todos los casos, siendo más notable esta tendencia en la norma NEHRP. La norma NSR-98 subestima la respuesta en periodos largos de vibración de la estructura y la sobrestima en los periodos cortos.



**Figura 1: Aceleraciones absolutas normalizadas a la aceleración máxima del suelo en función de la altura normalizada de la estructura,  $y/H$ , para el sismo de México de 1985.**



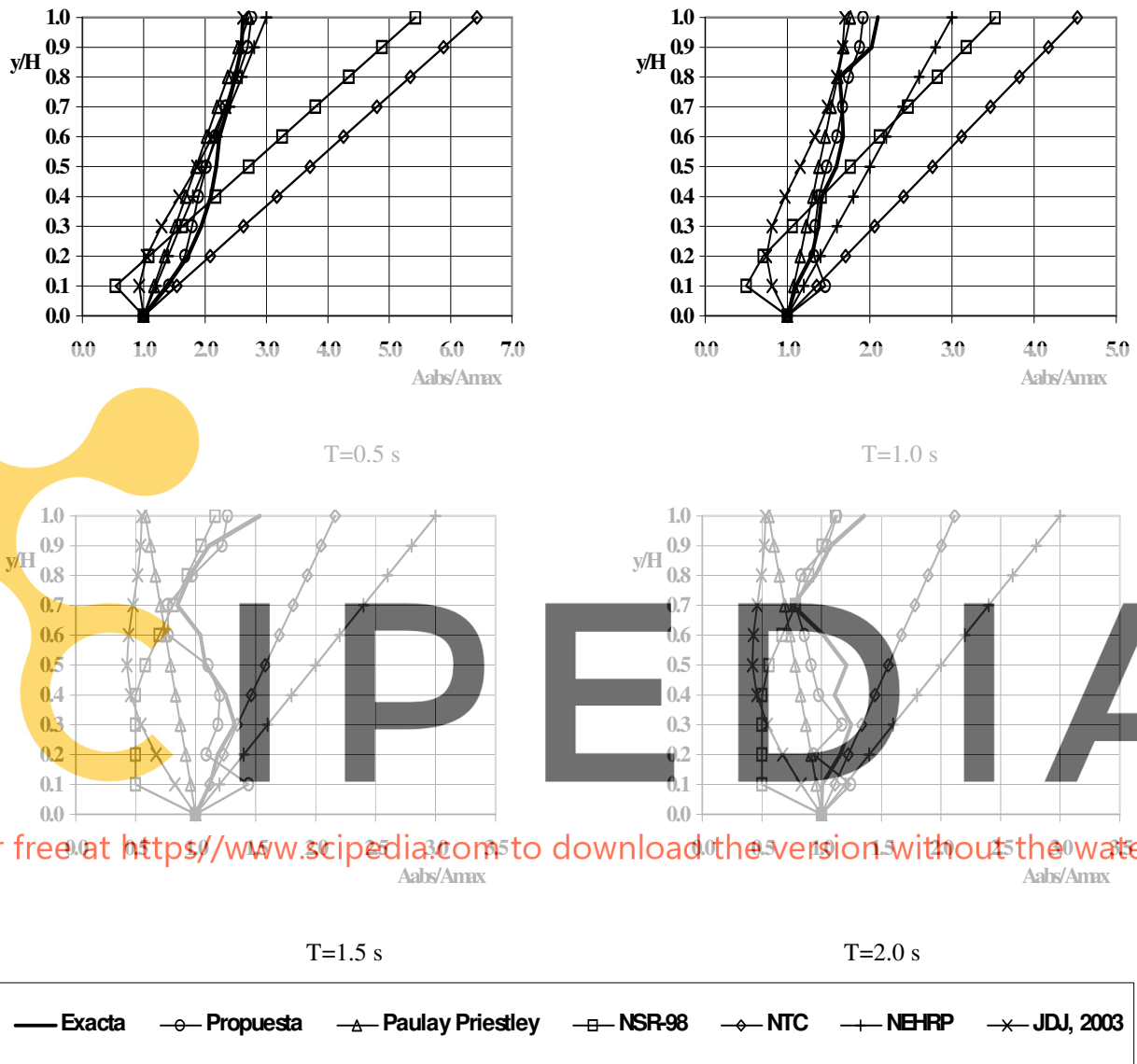
De la Figura 3, que muestra la respuesta al sismo de El Centro, se infieren afirmaciones semejantes a las enunciadas en el párrafo anterior para las respuestas al sismo de Corralitos, salvo que en este caso, la participación de los modos superiores en la respuesta es notable a partir de periodos fundamentales de las estructuras iguales o superiores a 1.5s. Lo anterior se debe a un contenido frecuencial más bajo del registro del El Centro en comparación con el registro de Corralitos. Igual que en este caso, las respuestas al registro de Viña del Mar que se muestran en la Figura 4, permiten concluir afirmaciones semejantes a las ya enunciadas.



**Figura 2: Aceleraciones absolutas normalizadas a la aceleración máxima del suelo en función de la altura normalizada de la estructura,  $y/H$ , para el sismo de Loma Prieta, Corralitos de 1989.**

Para dar una medida más concreta de la precisión de cada una de las soluciones analizadas, a continuación se calcula el promedio del porcentaje de error de las propuestas respecto a la solución exacta para cada uno de los registros propuestos en la Tabla 1. En donde sea aplicable, la respuesta se calcula considerando 10 modos de vibración. Las aceleraciones máximas absolutas se calculan cada décimo de la altura de la edificación y para periodos fundamentales de vibración iniciando en 0.5s hasta 2.0s cada 0.1s. Para cada caso, las frecuencias circulares de vibración de los modos superiores siguen la relación que señala la ecuación 19 y las formas modales que indican la ecuación 17. Igualmente, se

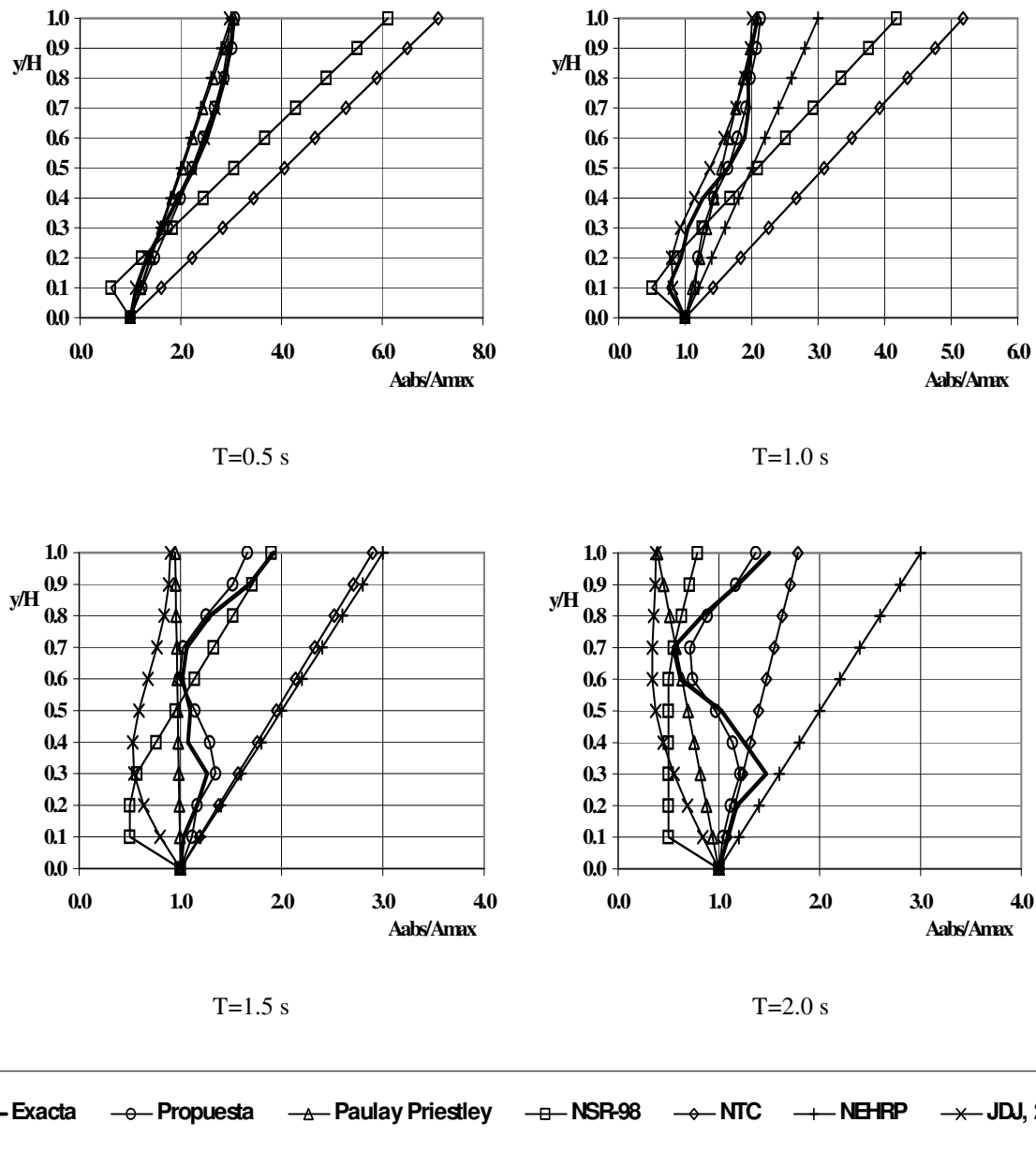
consideran dos razones de amortiguamiento respecto al crítico: 0.03 y 0.05. El número de respuestas en las que se basa el cálculo presentado para cada sismo es 320. En la Tabla 3 se muestran los resultados de los cálculos descritos.



**Figura 3:** Aceleraciones absolutas normalizadas a la aceleración máxima del suelo en función de la altura normalizada de la estructura,  $y/H$ , para el sismo de El Centro, 1940.

**Tabla 3:** Promedio del porcentaje de error respecto a la solución exacta.

Sismos	Propuesta Error (%)	Jaramillo, 2003 Error (%)	Paulay-Priestley Error (%)	NSR-98 Error (%)	NTC, 2001 Error (%)	NEHRP, 1997 Error (%)
Mexico	12	37	21	36	65	49
Centro	8	5	8	48	86	34
Corralitos	12	48	30	46	51	58
L.P.-Capitol	12	46	26	43	58	36
Viña Del Mar	8	27	15	37	82	48
Tokachi-Oki	7	31	19	41	66	37
Promedio	10	32	20	42	68	44



**Figura 4: Aceleraciones absolutas normalizadas a la aceleración máxima del suelo en función de la altura normalizada de la estructura,  $y/H$ , para el sismo de Viña del Mar, Chile, 1985.**

Es claro de la Tabla 3 y de las Figuras 1, 2, 3 y 4 que, en términos de la desviación respecto a la solución exacta, la propuesta de este trabajo presenta errores entre 2 y 5 veces menores que las otras propuestas analizadas. En particular, es 3.2 veces más próxima a la solución exacta que la propuesta de Jaramillo (2003) que considera sólo el modo fundamental de vibración. Por otro lado, es claro de las Figuras 1, 2, 3 y 4 que los errores de la propuesta presentada se mantienen dentro de los mismos niveles en toda la altura de la edificación, mientras que en las otras propuestas analizadas el error varía con la altura desde valores muy bajos en los puntos de control, a valores que superan el 100% para determinadas alturas.

## CONCLUSIONES

Se presenta una propuesta para la estimación de la aceleración absoluta máxima en los diferentes niveles de un sistema de múltiples grados de libertad en función de las formas modales y del espectro de respuesta de aceleraciones, que tradicionalmente se propone en los reglamentos. Esta propuesta tiene un error promedio cuando se compara con la

solución exacta calculada usando series de tiempo de aproximadamente 10%, lo que contrasta con errores promedio del orden de 20%, 30%, 40% y 60% en otras propuestas analizadas.

La propuesta está basada en la combinación de las respuestas modales con la señal de excitación. En términos generales, las expresiones propuestas y los cálculos involucrados no difieren mucho de los comúnmente utilizados para la combinación de respuestas modales, como en el conocido método CQC.

La propuesta puede ser incluida formalmente en programas de computador que utilicen el análisis modal espectral para estimar las respuestas máximas de un sistema estructural sometido a una aceleración en su base, para estimar, igualmente, las aceleraciones máximas a las que estarían sometidos elementos no estructurales o apéndices ubicados a diferentes alturas que pudieran considerarse como infinitamente rígidos.

## REFERENCIAS

- AIS (1999). *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo-Resistente-NSR-98*, Ley 400 de 1997, decreto 33 de 1998. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS). Santafé de Bogotá.
- Hahn, G. D. y Valenti, M. C. (1997). "Correlation of seismic responses of structures", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 123, No. 4, pp. 405-413.
- Igusa, T. y Der Kiureghian, A. (1985). "Generation of floor response spectra including oscillator-structure interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 13, pp. 661-676.
- Jaramillo, J. D. (2003). "Evaluación aproximada de la aceleración absoluta para una forma modal en sistemas de múltiples grados de libertad". *Revista de Ingeniería Sísmica*, Vol. 69, pp. 73-92.
- NEHRP (1997). *Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures*.
- Paulay, T. y Priestley, N. (1992). *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*, John Wiley & Sons.
- NTC-2001 (2001). "Propuesta de Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo", <http://www.smie.org.mx/articulos>
- Singh, M. P. (1980). "Seismic design input for secondary systems", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 106, pp. 505-517.
- Singh, M. P. y Sharma A. M. (1985). "Seismic floor spectra by mode acceleration approach", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111, No.11, pp. 1402-1419.
- Villaverde, R. (1991). "Approximate formulas to calculate the seismic response of light attachment to buildings", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 123, No. 3, pp. 349-368.